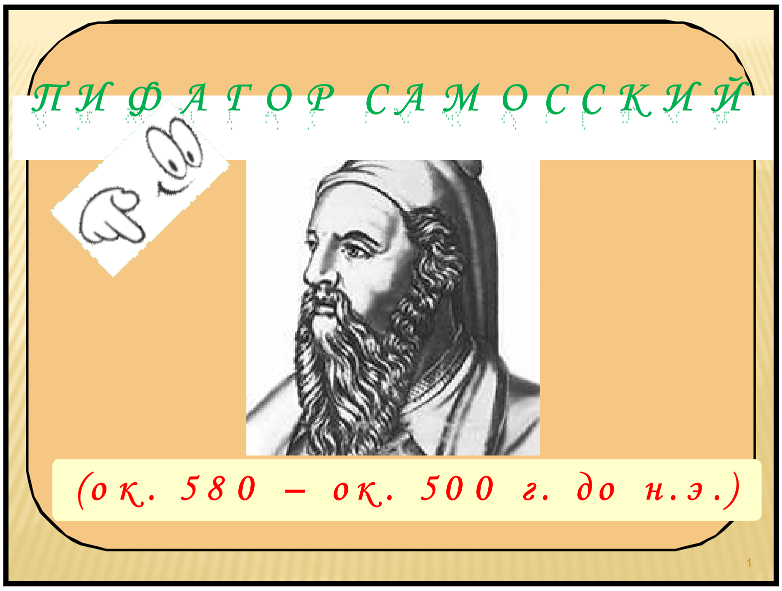
УРОК-ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ В 8 КЛАССЕ.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.

ЦЕЛЬ: познакомить учащихся с философом-математиком Пифагором Самосским; рассмотреть способы доказательства и историю т.Пифагора; решение задач на применение т.Пифагора; развивать умение выслушивать других; прививать интерес и любознательность в изучении геометрии и истории математики.

ХОД УРОКА:

1. Сегодня на уроке мы приступает к изучению одной из важнейших теорем геометрии – теоремы Пифагора. Она является основой решения множества геометрических задач и базой изучения теоретического материала в дальнейшем. Рассмотрим доказательства этой теоремы и решим несколько задач с её применением, но сначала послушаем рассказ о математике, именем которого она названа, его подготовил(а) ____ *(сообщение см. в приложении)*. **(слайд 1)**

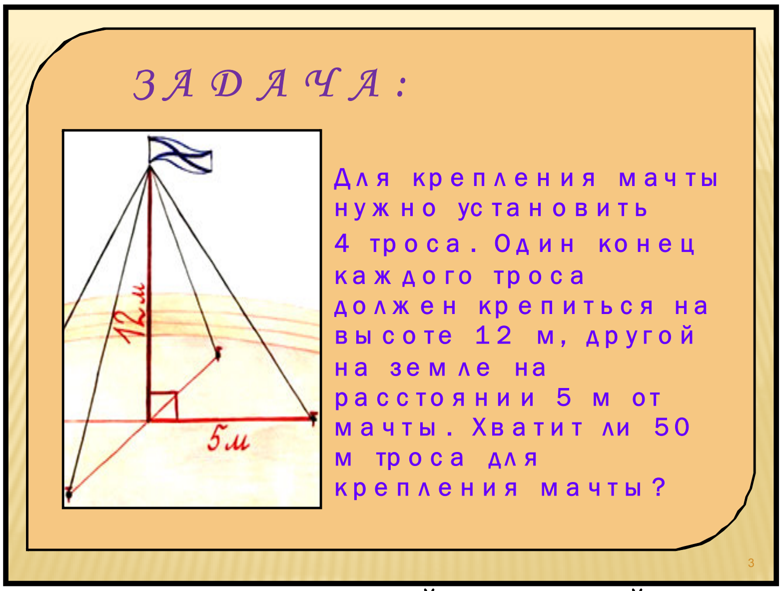


2. Из рассказа вы узнали, что союз пифагорейцев был тайным. Эмблемой или опознавательным знаком союза являлась пентаграмма **(слайд 2)** – пятиконечная звезда. Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Пифагор сформулировал список табу для членов своего ордена.

Пифагор сделал много важных открытий, но наибольшую славу учёному принесла доказанная им теорема, которая сейчас носит его имя.

Откройте тетради, запишите число … и тему урока "Теорема Пифагора".

3.Учащимся предлагается решить задачу **(слайд 3)**:

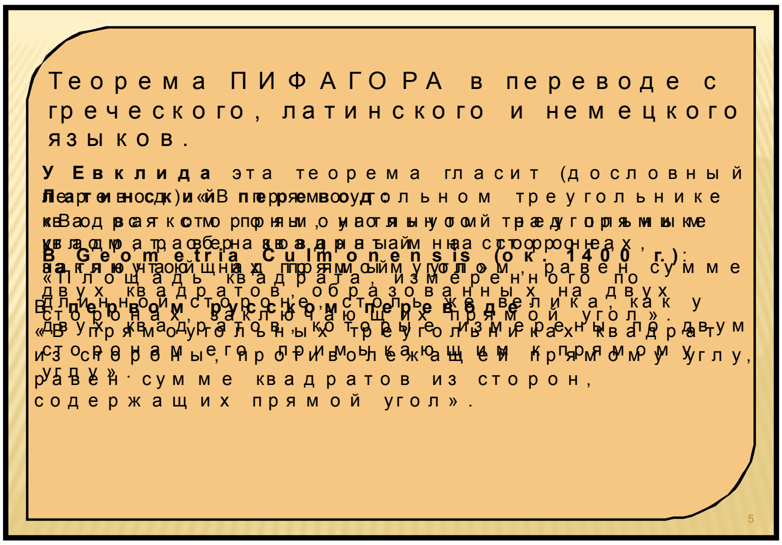


Анализируя математическую модель этой практической задачи, учащиеся формулируют проблему – нужно найти гипотенузу прямоугольного треугольника по двум известным катетам. Формулируют теорему Пифагора, которая знакома с уроков алгебры**:**

"В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов".

Как записать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника *ABC* с катетами *a*, *b* и гипотенузой *c* **(слайд 4)**?

Вот как звучит знаменитая теорема Пифагора в переводе с греческого, латинского и немецкого языков. (**слайд 5**):



У Евклида эта теорема гласит (дословный перевод):

«В прямоугольном треугольнике квадрат стороны, натянутой над прямым углом, равен квадратам на сторонах, заключающих прямой угол».

«**Латинский перевод** арабского текста Аннаирици (около 900 г. до н.э.), сделанный Герхардом Клемонским (начало XII века), в переводе на русский язык гласит:

«Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол».

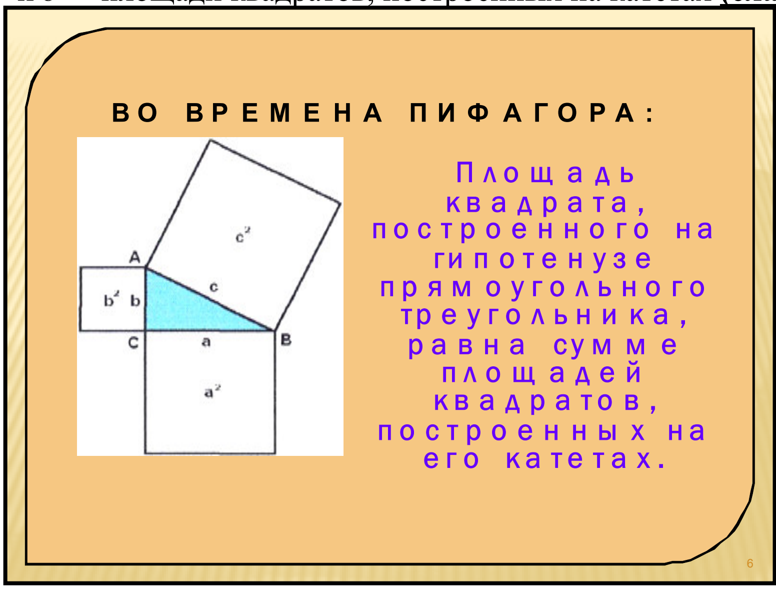
В Geometria Culmonensis (ок. 1400 г.) в переводе теорема читается так:

«Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу».

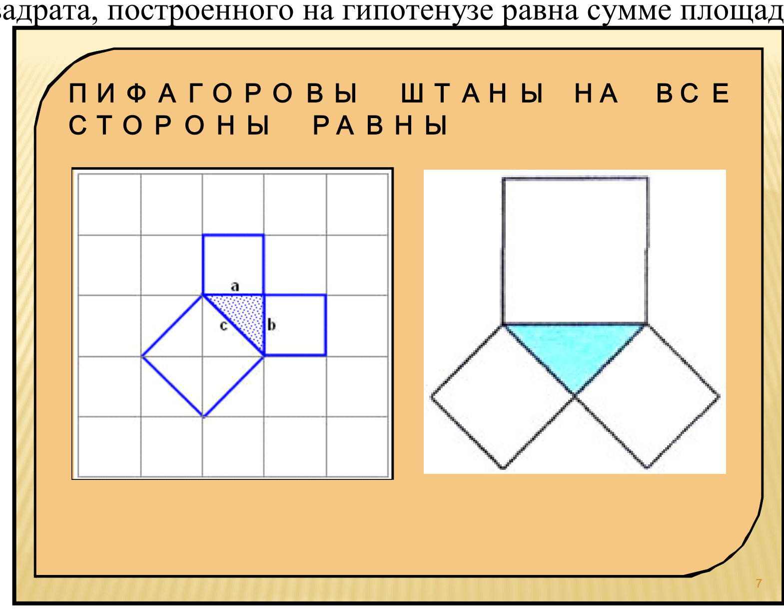
В **первом русском переводе** евклидовых «Начал», сделанном Ф.И. Петрушевским, теорема Пифагора изложена так:

«В прямоугольных треугольниках квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол».

Предполагают, что **во времена Пифагора** теорема звучала по-другому: "Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах". Действительно, c^2 – площадь квадрата, построенного на гипотенузе, a^2 и b^2 – площади квадратов, построенных на катетах **(слайд 6):**

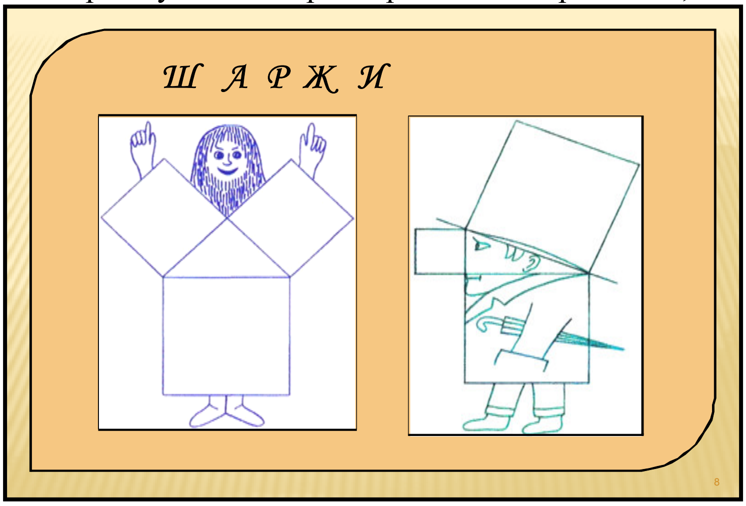


Факт, изложенный в теореме Пифагора, был сначала установлен для равнобедренных прямоугольных треугольников. Квадрат, построенный на гипотенузе, содержит четыре треугольника. А на каждом катете построен квадрат, содержащий два треугольника. На **слайде (7)** видно, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.



Учащиеся средних веков при изучении теоремы рисовали шаржи. Вот, например, такие

(**<u>слайд 8)</u>**



4.Интересна **история теоремы Пифагора**.

<u>слайд 9</u>

Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах она встречается за 1200 лет до Пифагора. По-видимому, он первым нашёл её доказательство. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам – даже сто быков. Возможно, отсюда следует название знаменитой теоремы Пифагора – «**теорема 100 быков**»… Это, однако, противоречит сведениям о моральных и религиозных воззрениях Пифагора. В литературных источниках можно прочитать, что он "запрещал даже убивать животных, а тем более ими кормиться, ибо животные имеют душу, как и мы". В связи с этим более правдоподобной можно считать следующую запись: "… когда он доказал, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза имеет соответствие с катетами, он принес в жертву быка, сделанного из пшеничного теста".

Во Франции и Германии в Средневековье теорему Пифагора называли «**мостом ослов**» или «**бегством убогих**», потому что перед экзаменом, содержащим вопросы по этой теме, начинался массовый отток нерадивых студентов. У математиков арабского Востока эта теорема получило интересное название – «**теорема невесты**». Дело в том, что в некоторых списках «Начал» Эвклида эта теорема называлась «теоремой нимфы» за сходство чертежа с пчёлкой, бабочкой (по-гречески – «нимфа»). Но словом «нимфа» греки называли ещё и некоторых богинь, а также молодых женщин и невест. При переводе с греческого арабский переводчик, не обратив внимания на чертёж, перевёл слово «нимфа» как «невеста», а не как «бабочка». Так появилось ласковое название знаменитой теоремы Пифагора – «**теорема невесты**».

В настоящее время их насчитывается более 350, за это т.Пифагора занесена в книгу рекордов Гинесса.

5.Рассмотрим **различные способы доказательства** т.Пифагоры, которые вы приготовили.

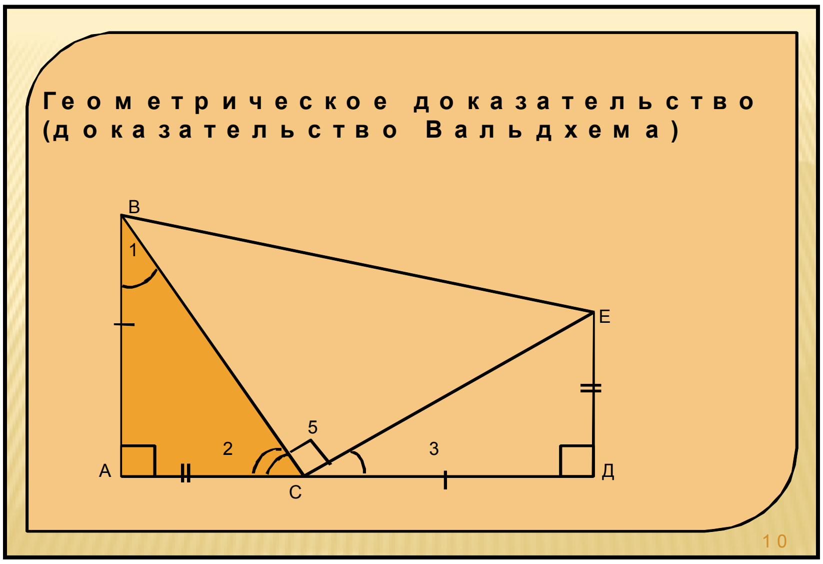
1способ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (доказательство Вальдхема)

(доказывает ученик):

Дано: ΔABC, $\angle A = 90^0$.

Доказать: $BC^2 = AC^2 + AB^2$

(слайд 10):



Доказательство:

•I. Дополнительное построение:

1) Построим отрезок CD равный отрезку AB прямоугольного треугольника ABC на продолжении катета AC;

2) Опустим перпендикуляр ED к отрезку AD равный отрезку AC прямоугольного треугольника ABC, $DE \perp AD$;

3) Соединим точки B и E и получим прямоугольную трапецию ABЕД.

II.Площадь трапеции ABED равна сумме площадей трёх её треугольников (Δ ABC, ΔCDE, ΔBCE).

$\Delta ABC = \Delta CDE$ (по двум катетам).

Площадь ΔABC равна $AB{\cdot}AC/2$, сумма S Δ ABC и ΔCDE равна $AB{\cdot}AC$.

Δ BCE – прямоугольный равнобедренный, так как BC = CE (по построению), $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180^0$, т.к $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 = 90^0$, то $\angle 5 = 90^0$. $S_{BCE} = BC^2/2$

$S_{ABED} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BCE}$, $S_{ABED} = 2\,S_{ABC} + S_{BCE}$

$$S_{ABED} = AB{\cdot}AC + BC^2 / 2 \qquad (1)$$

Фигура ABED является прямоугольной трапецией, значит, её площадь равна:

«Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту».

$$S_{ABED} = (ED + AB)\cdot AD/2 \qquad (2)$$

Приравняем равенства (1) и (2) и получим:

$AB{\cdot}AC + BC^2/2 = (ED + AB){\cdot}AD/2$

Заменим AD на AC + CD:

$AB{\cdot}AC + BC^2/2 = (ED + AB){\cdot}(AC + CD)/2$

Заменим $(ED + AB)\cdot(AC + CD)$ на $(AC + AB)^2$, так как ED = AC, AB = CD,

поэтому: $(ED + AB)\cdot(AC + CD) = (AC + AB)^2$

$AB{\cdot}AC + BC^2/2 = (AC + AB)^2/2$

$AB{\cdot}AC + BC^2/2 = (AC^2 + 2\,AC{\cdot}AB + AB^2)/2$

$AB{\cdot}AC + BC^2/2 = AC^2/2 + 2\,AC{\cdot}AB/2 + AB^2/2$

$\underline{AB{\cdot}AC} + BC^2/2 = AC^2/2 + \underline{AC{\cdot}AB} + AB^2/2$

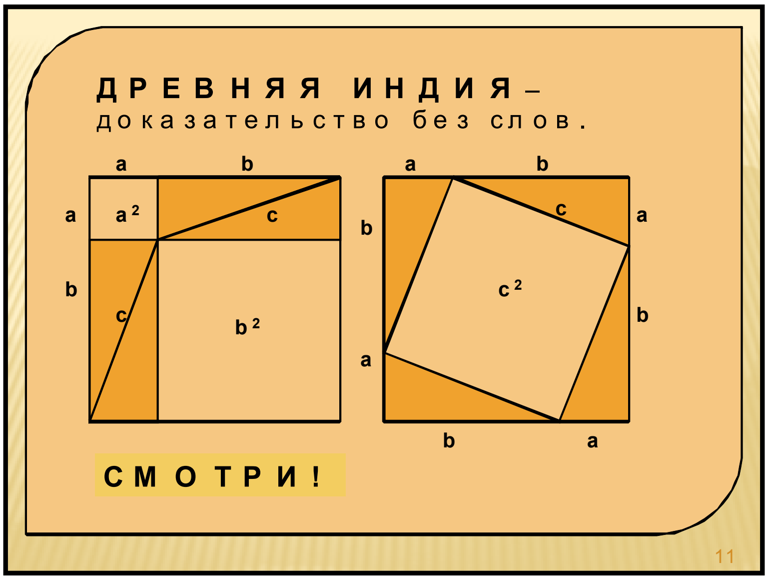
$BC^2/2 = AC^2/2 + AB^2/2$ умножим на 2:

$BC^2 = AC^2 + AB^2$. Что и требовалось доказать.•

2 способ: (комментирует учитель):

«Одно из таких доказательств приведено в трактате индийского математика XII века Бхаскары. Оно знаменито тем, что весь текст сводится к единому чертежу, состоит из единственного слова: «Смотри!»

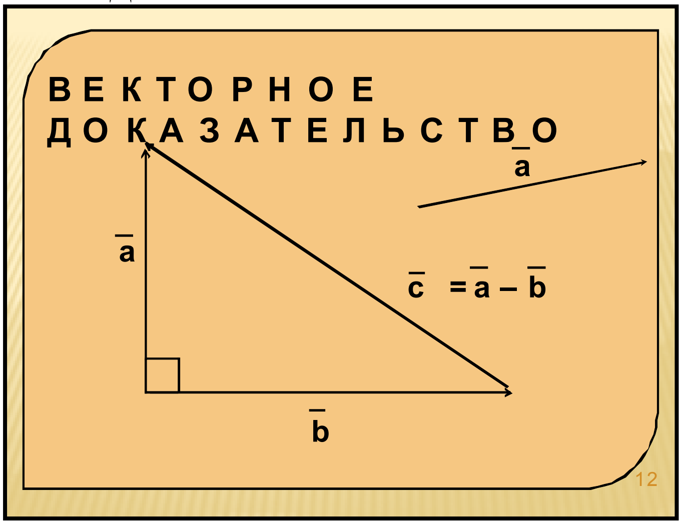
(**слайд 11**):



Комментарий: На рисунках два квадрата со стороной a + b. Из каждого из них убираем по 4 равных прямоугольных треугольника (закрашены). (Если из равных фигур, убрать равные величины, то остатки тоже будут равные). На первом рисунке останутся два квадрата, построенные на катетах прямоугольного треугольника, а на втором рисунке – квадрат, построенный на гипотенузе. Следовательно, сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Что и требовалось доказать.

3 способ: ВЕКТОРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

(**слайд 12**)



Дан прямоугольный треугольник, который построен на векторах с прямым углом между ними.

Определения:

1.Вектор – отрезок, имеющий направление.

2.Разностью двух векторов называется вектор, начало, которого совпадает с концом первого вектора, а конец – с концом второго вектора.

3.Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Тогда справедливо равенство: $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$.

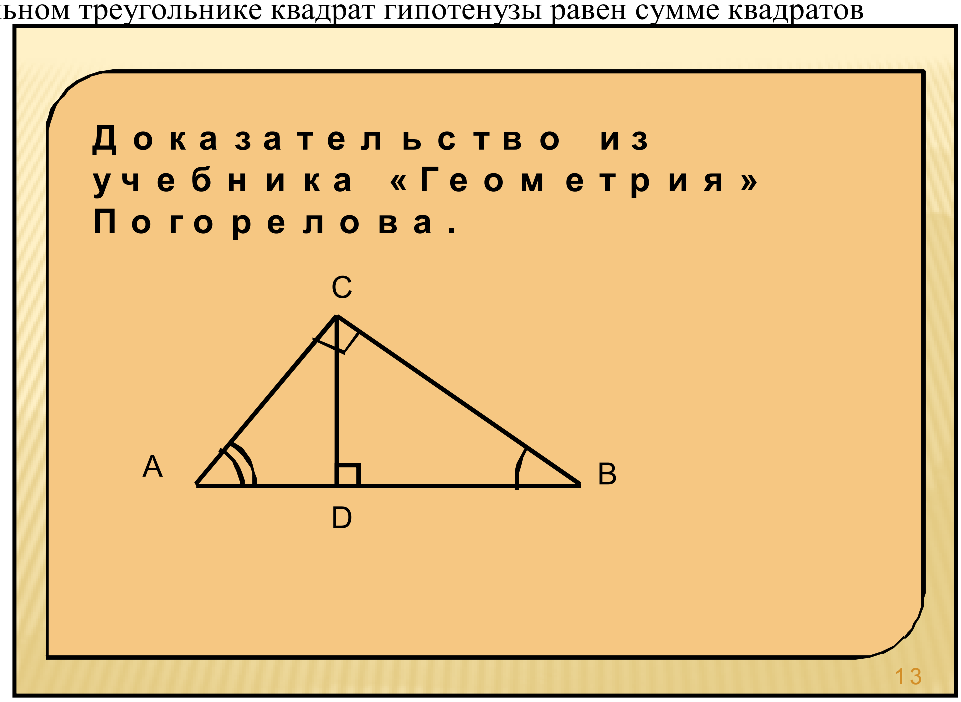
возведем обе части в квадрат, то получим $c^2 = a^2 - 2ab + b^2$, но, так как вектор a перпендикулярен вектору b, то их произведение $ab = 0$, и $2ab = 2 \cdot 0 = 0$.

Отсюда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$. Что и требовалось доказать.

<u>5 способ:</u> в учебнике геометрии Погорелова:

Т е о р е м а. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

<u>Слайд 13</u>



Д а н о: ΔABC, $\angle C = 90°$.

До к а з а т ь: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Проведём высоту CD из вершины прямого угла C.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе, поэтому в ΔACD $\cos A = AD/AC$,

а в ΔABC $\cos A = AC/AB$.

Так как равны левые части этих равенств, то равны и правые, следовательно,

$$AD/AC = AC/AB.$$

Отсюда, по свойству пропорции, получаем: $AC^2 = AD \cdot AB$ (1).

Аналогично, в ΔBCD $\cos B = BD/BC$,

а в ΔABC $\cos B = BC/AB$.

Так как равны левые части этих равенств, то равны и правые, следовательно,

$$BD/BC = BC/AB.$$

Отсюда, по свойству пропорции, получаем: $BC^2 = BD \cdot AB$ (2).

Сложим почленно равенства (1) и (2), и вынесем общий множитель за скобки:

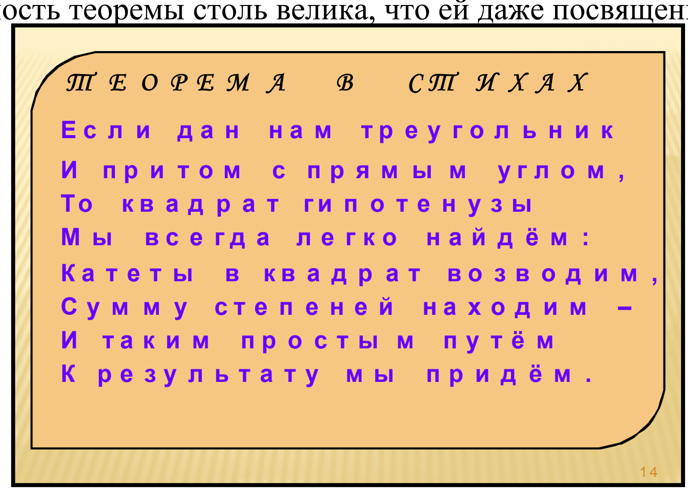
$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD).$$

Так как $AD + BD = AB$, то $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AB = AB^2$.

Получили, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$. ч.т.д.

Популярность теоремы столь велика, что ей даже посвящены стихи.(**<u>слайд 14</u>**)

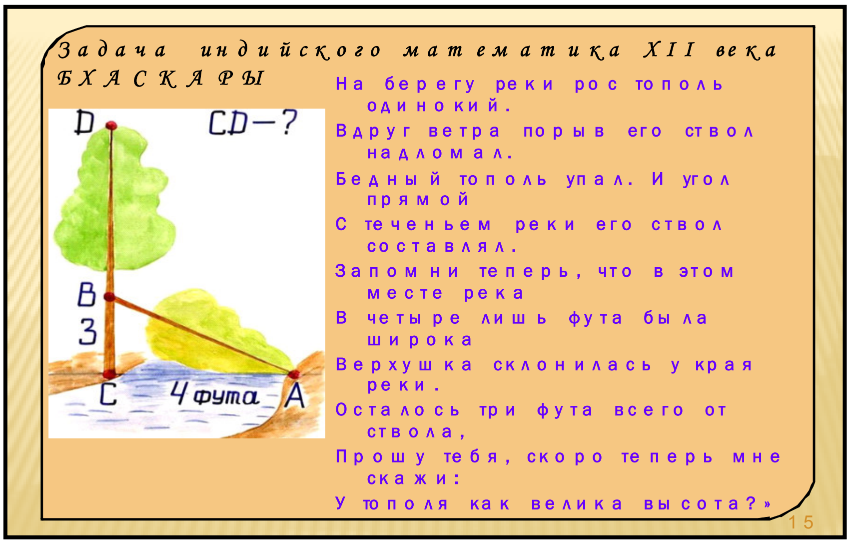
Итак,



6. **Широкое применение** теоремы Пифагора Самосского **при решении различных геометрических задач:**

Первая задача:

слайд 15



Решение

Треугольник ABC – прямоугольный треугольник.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 16 + 9$

$AB = \sqrt{25}$

$AB = 5$

Но из условия задачи нам известно, что порыв ветра сломил тополь на высоте в 3 фута от земли, то есть высота тополя будет равна 5 футов + 3 фута = 8 футов.

Ответ: Высота тополя равна 8 футов.

Вторая задача

слайд 16

Дано: ΔABC, $\angle A=90^0$, $AB = 117$, $BC = 125$.

Найти: AC.

Решение:

т.к. ΔABC прямоугольный, то по т.Пифагора: $BC^2 = AB^2 + AC^2$, $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 125^2 - 117^2 = 1936$, $AC = \sqrt{1936} = 44$.

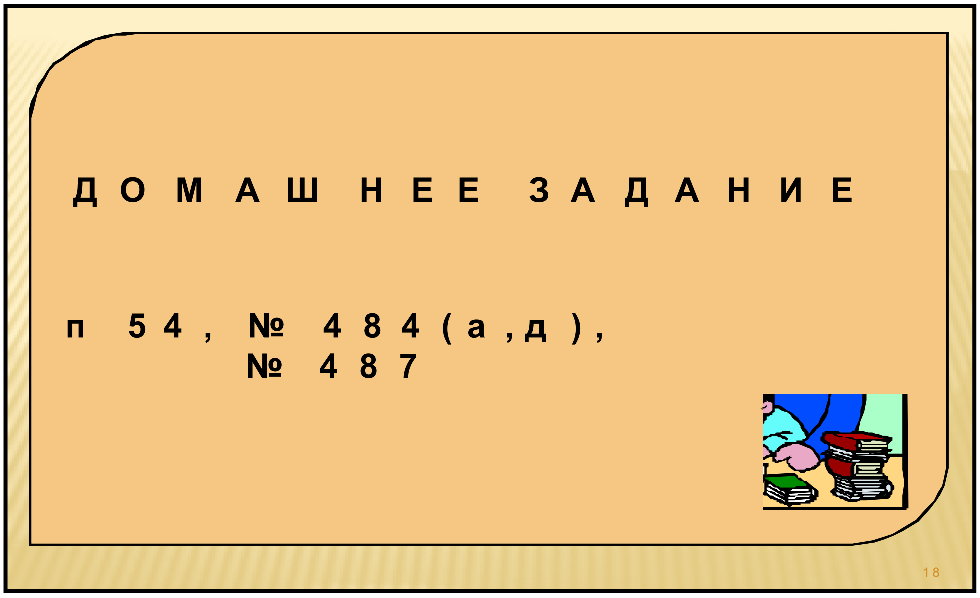
Ответ: 44стопы.

7.Подведение итогов урока.

Итак, сегодня на уроке мы познакомились с одной из главных теорем геометрии – теоремой Пифагора и её доказательством, с некоторыми сведениями из жизни учёного, имя которого она носит, решили несколько простейших задач.

Значение теоремы Пифагора состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии и решить множество задач.
(слайд 17)

8.Домашнее задание. К следующему уроку вы должны выучить теорему Пифагора с доказательством, приведенном в нашем учебнике и решить задачи (**слайд 18)**



(слайд 19):